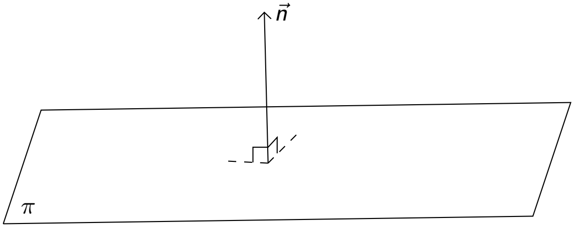
6.2. Jednadžba ravnine

15. 1. 2020.

Fotografija: Ajay Tripathi

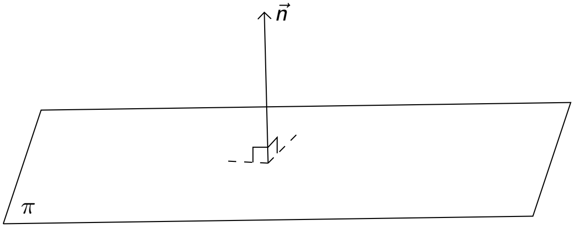
Kanonski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Njen **vektor normale** $\vec{n}$ jest svaki vektor $\vec{n} \in V^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ takav da je $\vec{n} \perp \pi$.



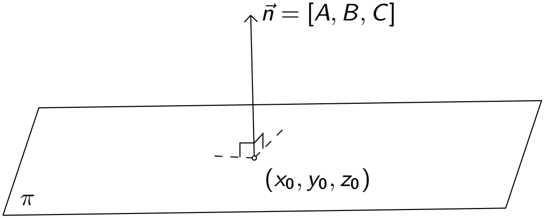
Kanonski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Njen **vektor normale** $\vec{n}$ jest svaki vektor $\vec{n} \in V^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ takav da je $\vec{n} \perp \pi$.



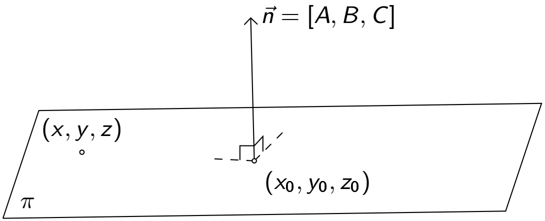
Takav $\vec{n}$ nije jedinstven! Jedinstven mu je samo smjer.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine



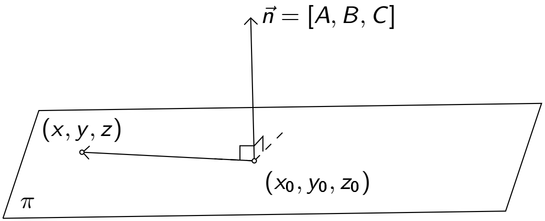
Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine



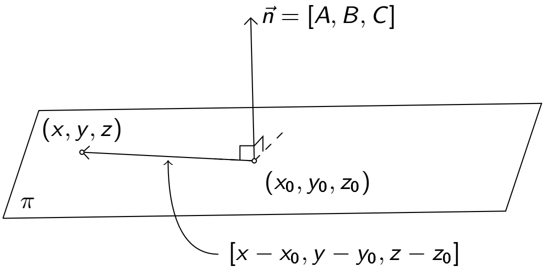
Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine



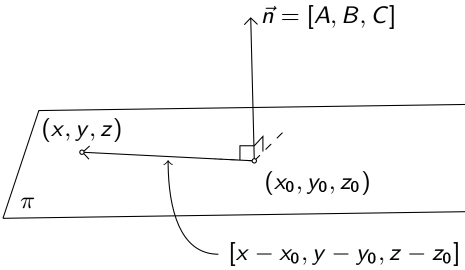
Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine



Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

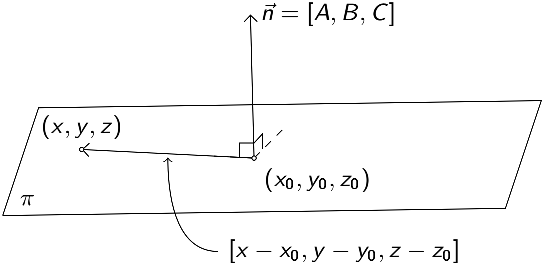
Kanonski oblik jednadžbe ravnine



Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Primijetimo:

$$\text{točka } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ je u ravnini } \pi \quad \Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \perp \vec{n}$$

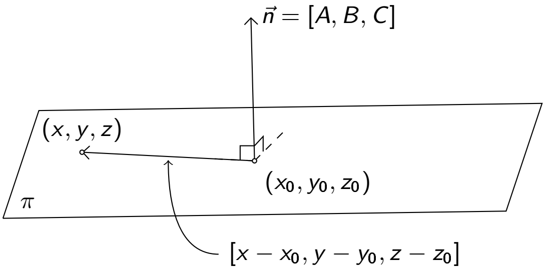
Kanonski oblik jednadžbe ravnine



Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Primijetimo:

$$\begin{aligned} \text{točka } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ je u ravnini } \pi \quad &\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [A, B, C] = 0 \end{aligned}$$

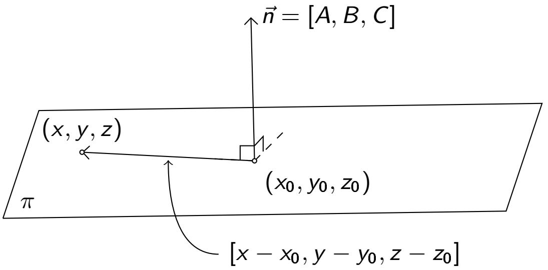
Kanonski oblik jednadžbe ravnine



Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Primijetimo:

$$\begin{aligned}
\text{točka } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ je u ravnini } \pi \quad &\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \perp \vec{n} \\
&\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [A, B, C] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.
\end{aligned}$$

Kanonski oblik jednadžbe ravnine



Neka je $\vec{n} = [A, B, C]$ normala ravnine π, i fiksirajmo točku $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$. Primijetimo:

$$\begin{aligned} \text{točka } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ je u ravnini } \pi \quad &\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] \cdot [A, B, C] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

jest jednadžba ravnine π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0).

Kanonski oblik jednadžbe ravnine

Dakle, ravnina π s vektorom normale $[A, B, C] \in V^3 \setminus \{\vec{0}\}$ kroz točku $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Kanonski oblik jednadžbe ravnine

Dakle, ravnina π s vektorom normale $[A, B, C] \in V^3 \setminus \{\vec{0}\}$ kroz točku $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Prebacivanjem konstantnih članova na desnu stranu ove jednadžbe dobivamo **kanonski oblik jednadžbe ravnine** π:

$$\boxed{\pi \ldots \ Ax + By + Cz = D,}$$

gdje su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ i $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine

Dakle, ravnina π s vektorom normale $[A, B, C] \in V^3 \setminus \{\vec{0}\}$ kroz točku $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Prebacivanjem konstantnih članova na desnu stranu ove jednadžbe dobivamo **kanonski oblik jednadžbe ravnine** π:

$$\boxed{\pi \ldots\ Ax + By + Cz = D,}$$

gdje su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ i $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine π jedinstven je do na množenje konstantom iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine

Dakle, ravnina π s vektorom normale $[A, B, C] \in V^3 \setminus \{\vec{0}\}$ kroz točku $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Prebacivanjem konstantnih članova na desnu stranu ove jednadžbe dobivamo **kanonski oblik jednadžbe ravnine** π:

$$\boxed{\pi \ldots\ Ax + By + Cz = D,}$$

gdje su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ i $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Kanonski oblik jednadžbe ravnine π jedinstven je do na množenje konstantom iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Važna napomena. Ako je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots\ Ax + By + Cz + D = 0,$$

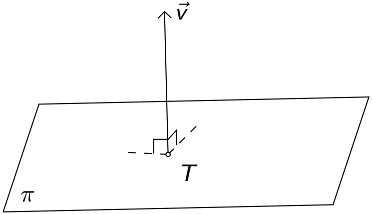
tada je vektor $[A, B, C]$ jedna njena normala.

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

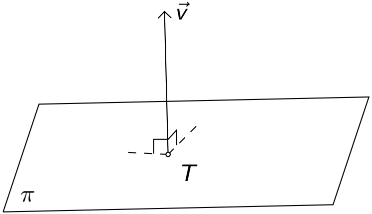
Rješenje.



Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



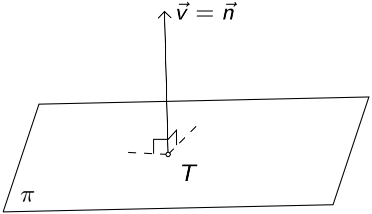
Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



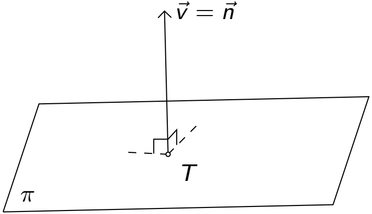
Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

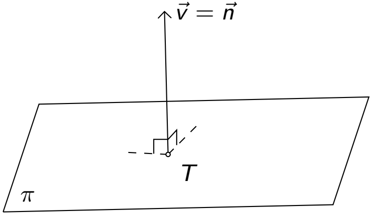
$$\boxed{\pi \ldots \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

- Očito je $\vec{v}$ normala od π pa možemo staviti $[A, B, C] = \vec{v} = [1, 2, 3]$.

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

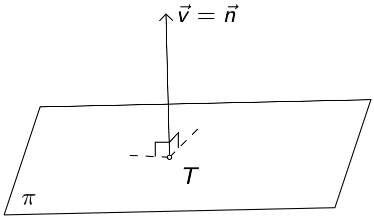
$$\boxed{\pi \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

- Očito je $\vec{v}$ normala od π pa možemo staviti $[A, B, C] = \vec{v} = [1, 2, 3]$.
- Kako je $T \in \pi$, možemo staviti $(x_0, y_0, z_0) = T = (0, 1, -1)$.

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

- Očito je $\vec{v}$ normala od π pa možemo staviti $[A, B, C] = \vec{v} = [1, 2, 3]$.
- Kako je $T \in \pi$, možemo staviti $(x_0, y_0, z_0) = T = (0, 1, -1)$.

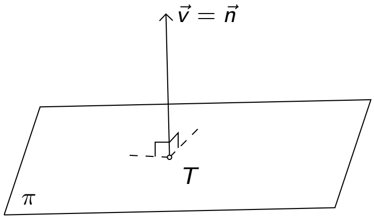
Dakle, ravnina π je dana jednadžbom

$$\pi \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

- Očito je $\vec{v}$ normala od π pa možemo staviti $[A, B, C] = \vec{v} = [1, 2, 3]$.
- Kako je $T \in \pi$, možemo staviti $(x_0, y_0, z_0) = T = (0, 1, -1)$.

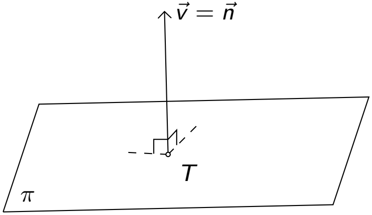
Dakle, ravnina π je dana jednadžbom

$$\pi \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 0) + 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$$

Zadatak 57

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja je okomita na vektor $\vec{v} = [1, 2, 3]$ i prolazi točkom $T = (0, 1, -1)$.

Rješenje.



Sjetimo se: ravnina π s vektorom normale $[A, B, C]$ kroz točku (x_0, y_0, z_0) dana je jednadžbom

$$\boxed{\pi \ldots \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

- Očito je $\vec{v}$ normala od π pa možemo staviti $[A, B, C] = \vec{v} = [1, 2, 3]$.
- Kako je $T \in \pi$, možemo staviti $(x_0, y_0, z_0) = T = (0, 1, -1)$.

Dakle, ravnina π je dana jednadžbom

$$\begin{aligned} \pi \ldots \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ 1(x - 0) + 2(y - 1) + 3(z + 1) &= 0 \\ x + 2y + 3z &= -1. \end{aligned}$$

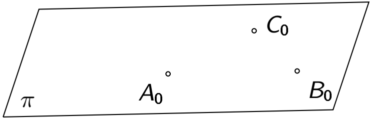
Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

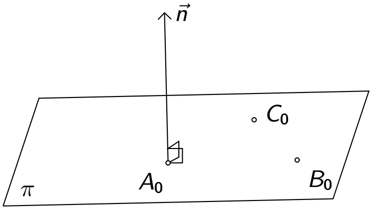
Rješenje. 1. način (geom.).



Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

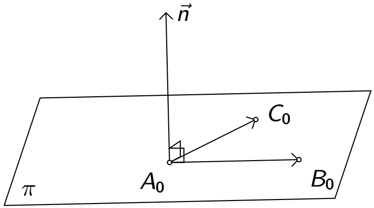
Rješenje. 1. način (geom.).



Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

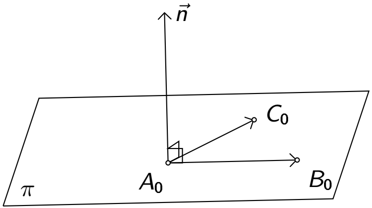
Rješenje. 1. način (geom.).



Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.).



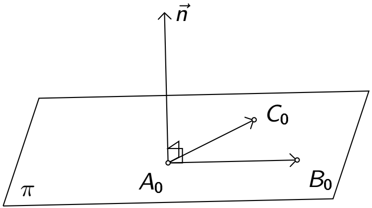
Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti

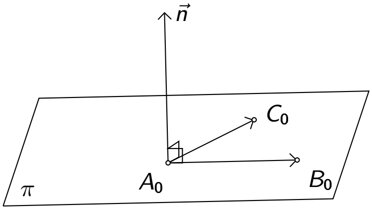


$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.).



Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti

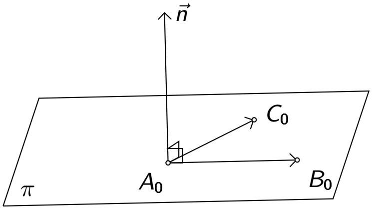
$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

$$= [0, 1, 1] \times [-1, 0, -1]$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



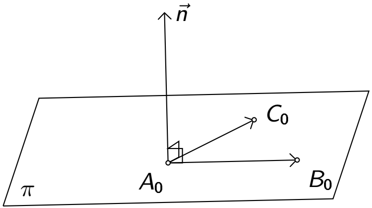
$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

$$= [0,1,1] \times [-1,0,-1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

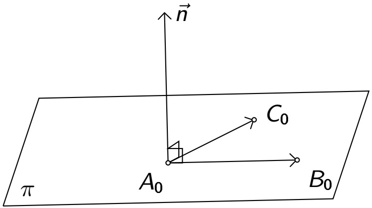
$$= [0,1,1] \times [-1,0,-1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

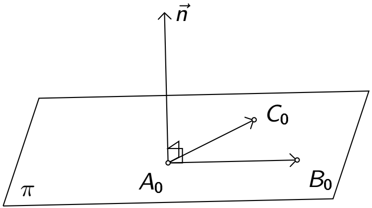
$$= [0, 1, 1] \times [-1, 0, -1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.).



Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

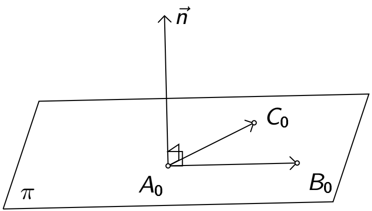
$$= [0,1,1] \times [-1,0,-1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

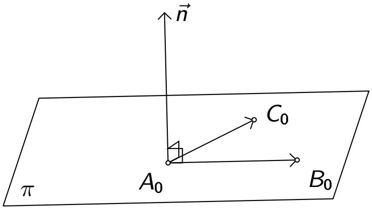
$$= [0, 1, 1] \times [-1, 0, -1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = [-1, -1, 1].$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0] \\
&= [0,1,1] \times [-1,0,-1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = [-1,-1,1].
\end{aligned}
$$

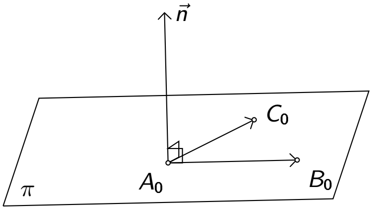
Uz to je npr. $A_0 \in \pi$ pa je, stavljajući $[A, B, C] = \vec{n} = [-1,-1,1]$ i $(x_0, y_0, z_0) = A_0 = (1,0,0)$, ravnina π dana jednadžbom

$$\pi \ldots A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$
$$= [0, 1, 1] \times [-1, 0, -1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = [-1, -1, 1].$$

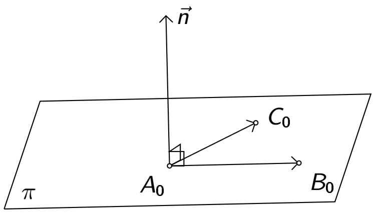
Uz to je npr. $A_0 \in \pi$ pa je, stavljajući $[A, B, C] = \vec{n} = [-1, -1, 1]$ i $(x_0, y_0, z_0) = A_0 = (1, 0, 0)$, ravnina π dana jednadžbom

$$\pi \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$-1(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 1. način (geom.). Kako je $\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0} \parallel \pi$, za normalu $\vec{n}$ ravnine π možemo uzeti



$$\vec{n} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} = [1-1, 1-0, 1-0] \times [0-1, 0-0, -1-0]$$

$$= [0, 1, 1] \times [-1, 0, -1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = [-1, -1, 1].$$

Uz to je npr. $A_0 \in \pi$ pa je, stavljajući $[A, B, C] = \vec{n} = [-1, -1, 1]$ i $(x_0, y_0, z_0) = A_0 = (1, 0, 0)$, ravnina π dana jednadžbom

$$\pi \ldots\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$-x - y + z = -1.$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski).

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, takve da ravnina

$$\pi \dots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \ Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ \\ C = -D \end{cases}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ D + B - D = D \\ C = -D \end{cases}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \ Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ D + B - D = D \\ C = -D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = D \\ C = -D. \end{cases}$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ D + B - D = D \\ C = -D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = D \\ C = -D. \end{cases}$$

Uzmimo npr. $D = 1$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ D + B - D = D \\ C = -D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = D \\ C = -D. \end{cases}$$

Uzmimo npr. $D = 1 \rightsquigarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -1$, tj.

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1,0,0)$, $B_0 = (1,1,1)$ i $C_0 = (0,0,-1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \ Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ D + B - D = D \\ C = -D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = D \\ C = -D. \end{cases}$$

Uzmimo npr. $D = 1 \rightsquigarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -1$, tj.

$$\pi \ldots \ x + y - z = 1.$$

Zadatak 58

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži točke $A_0 = (1, 0, 0)$, $B_0 = (1, 1, 1)$ i $C_0 = (0, 0, -1)$. Odredite jednu normalu ravnine π.

Rješenje. 2. način (računski). Tražimo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, takve da ravnina

$$\pi \ldots \; Ax + By + Cz = D$$

zadovoljava

$$\begin{cases} A_0 \in \pi \\ B_0 \in \pi \\ C_0 \in \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = D \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-1) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ A + B + C = D \\ -C = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ D + B - D = D \\ C = -D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = D \\ C = -D. \end{cases}$$

Uzmimo npr. $D = 1 \rightsquigarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -1$, tj.

$$\pi \ldots \; x + y - z = 1.$$

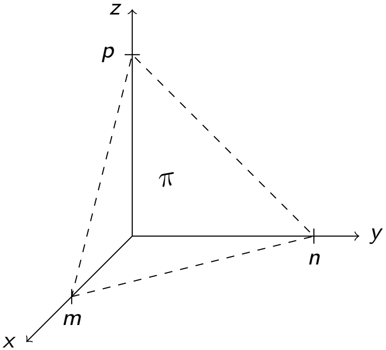
(Za drugačiji izbor $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dobije se ova jednadžba pomnožena sa D.)

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Ako ravnina π nije paralelna nijednoj koordinatnoj osi i ne prolazi ishodištem, tada postoji **segmentni oblik jednadžbe** od π:

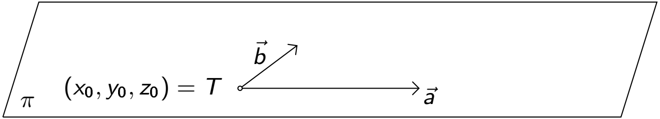
$$\boxed{\pi \ldots \ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1}$$

za neke $m, n, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Brojevi m, n, p su odsječci ravnine π na koordinatnim osima:



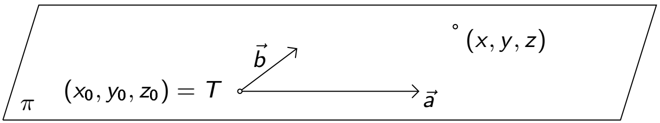
Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



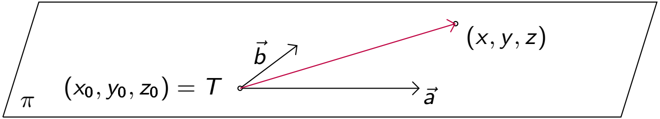
Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



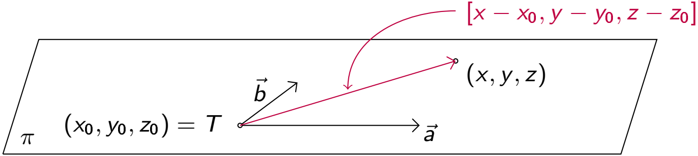
Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



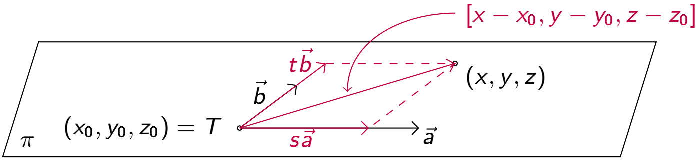
Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Parametarski oblik jednadžbe ravnine

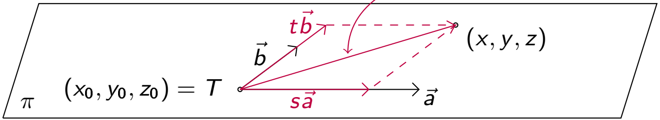
Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

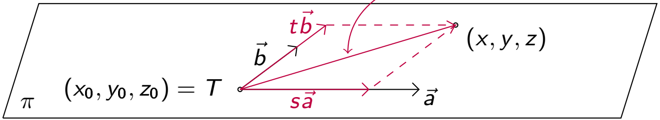
$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = s\vec{a} + t\vec{b}$$



Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = s\vec{a} + t\vec{b}$

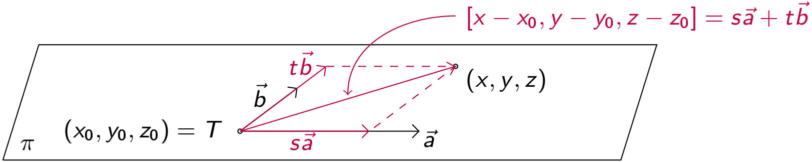


Primijetimo : točka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je u ravnini π

$$\Leftrightarrow \; [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



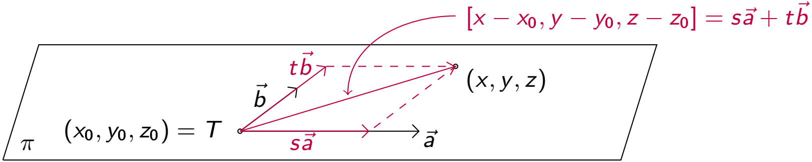
Primijetimo : točka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je u ravnini π

$$\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = [sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3] \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Primijetimo : točka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je u ravnini π

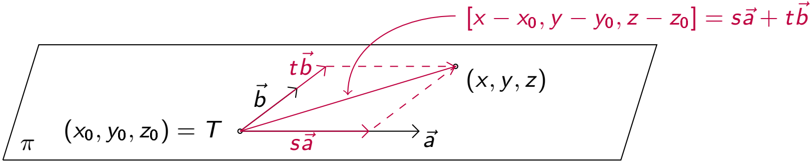
$$\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = [sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3] \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}.}$$

Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je π ravnina. Neka je $T = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ i neka su $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Primijetimo : točka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je u ravnini π

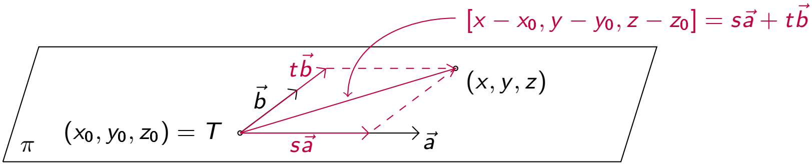
$$\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = [sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3] \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}.}$$

Uokvirena formula zove se **parametarski oblik jednadžbe ravnine** π.

Parametarski oblik jednadžbe ravnine

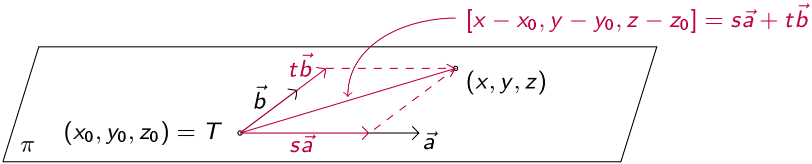


Zapamtimo: za parametarski oblik jednadžbe ravnine

$$\boxed{\pi \ldots \quad \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \qquad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}}$$

vrijedi:

Parametarski oblik jednadžbe ravnine



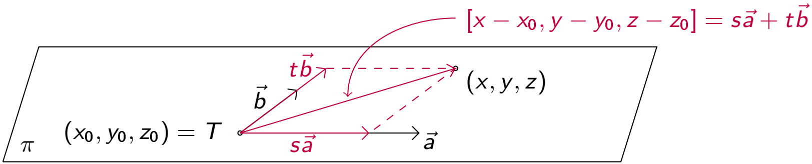
Zapamtimo: za parametarski oblik jednadžbe ravnine

$$\boxed{\pi \ldots \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}}$$

vrijedi:

- $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

Parametarski oblik jednadžbe ravnine



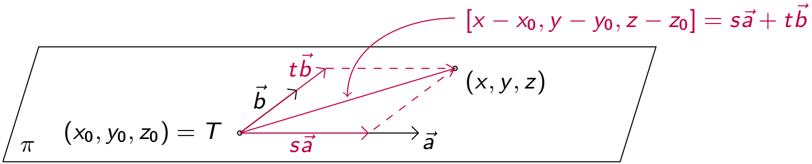
Zapamtimo: za parametarski oblik jednadžbe ravnine

$$\boxed{\pi \ldots \begin{cases} x = x_0 + s a_1 + t b_1 \\ y = y_0 + s a_2 + t b_2 \\ z = z_0 + s a_3 + t b_3 \end{cases} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}}$$

vrijedi:

- $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.
- $[a_1, a_2, a_3]$ i $[b_1, b_2, b_3]$ su međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Parametarski oblik jednadžbe ravnine



Zapamtimo: za parametarski oblik jednadžbe ravnine

$$\boxed{\pi \ldots \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \quad \text{za neke } s, t \in \mathbb{R}}$$

vrijedi:

- $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.
- $[a_1, a_2, a_3]$ i $[b_1, b_2, b_3]$ su međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.
- s i t su **slobodni parametri**: svaki izbor $s, t \in \mathbb{R}$ daje jednu točku $(x, y, z) \in \pi$.

Primjer 1

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = \phantom{1 + {}} s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$$

Primjer 1

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = \phantom{1 + {}} s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$$

Vrijedi:

- $T := (1, 0, 2) \in \pi$.

Primjer 1

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = \phantom{1 +{}} s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$$

Vrijedi:

- $T := (1, 0, 2) \in \pi$.
- $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ su međusobno nekolinearni vektori paralelni sa π.

Primjer 1

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = \phantom{1 + {}} s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$$

Vrijedi:

- $T := (1, 0, 2) \in \pi$.
- $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ su međusobno nekolinearni vektori paralelni sa π.
- s i t su slobodni parametri: svaki izbor $s, t \in \mathbb{R}$ daje jednu točku $(x, y, z) \in \pi$.

Primjer 1

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = \quad s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$$

Vrijedi:

- $T := (1, 0, 2) \in \pi$.
- $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ su međusobno nekolinearni vektori paralelni sa π.
- s i t su slobodni parametri: svaki izbor $s, t \in \mathbb{R}$ daje jednu točku $(x, y, z) \in \pi$. Npr.:
  - $s = t = 0 \rightsquigarrow (x, y, z) = (1 + 0 + 0, 0 - 0, 2 - 0 + 2 \cdot 0) = (1, 0, 2) \in \pi$

Primjer 1

Neka je ravnina π zadana jednadžbom

$$\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = \qquad s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$$

Vrijedi:

- $T := (1, 0, 2) \in \pi$.
- $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ su međusobno nekolinearni vektori paralelni sa π.
- s i t su slobodni parametri: svaki izbor $s, t \in \mathbb{R}$ daje jednu točku $(x, y, z) \in \pi$. Npr.:
  - $s = t = 0 \rightsquigarrow (x, y, z) = (1 + 0 + 0, 0 - 0, 2 - 0 + 2 \cdot 0) = (1, 0, 2) \in \pi$
  - $s = -2,\ t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow (x, y, z) = \left(1 - 2 + \frac{1}{2}, -2 - \frac{1}{2}, 2 - (-2) + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 5\right) \in \pi$.

Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Zadatak 59

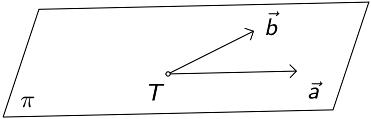
Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

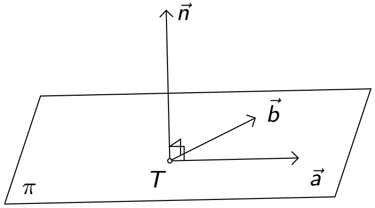
Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

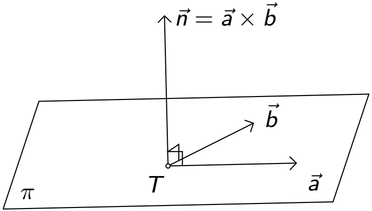
Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



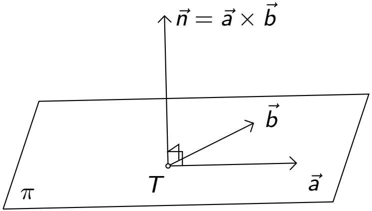
Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

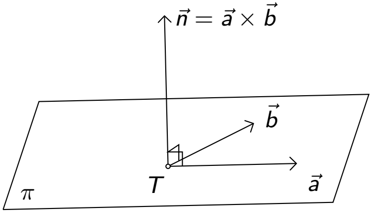


Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$



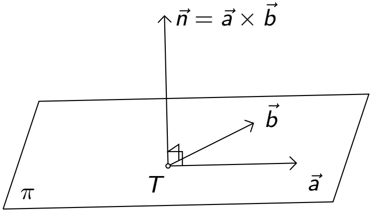
Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$



Zadatak 59

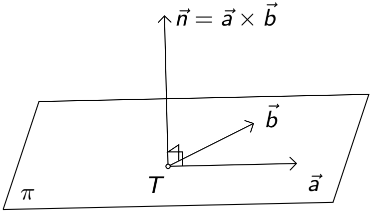
Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

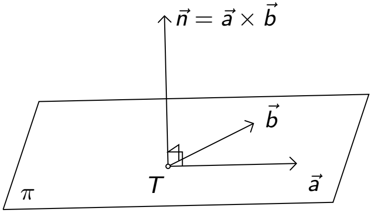


Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti



$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

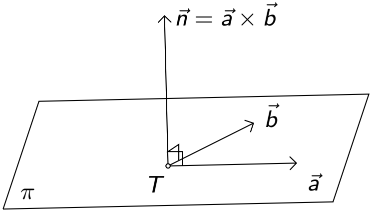
$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j}$$

Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti



$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Zadatak 59

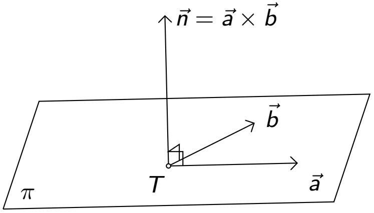
Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.

Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

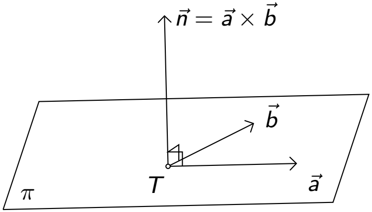
$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} = [1, -3, -2].$$



Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} = [1, -3, -2].$$

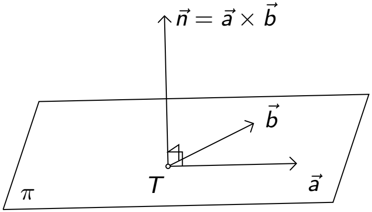
Stavljajući $[A, B, C] = \vec{n} = [1, -3, -2]$ i $(x_0, y_0, z_0) = T = (1, 0, 2)$, imamo

$$\pi \ldots A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1,0,2) \in \pi$ i da su $\vec a := [1,1,-1]$ i $\vec b := [1,-1,2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Za vektor normale $\vec n$ od π možemo uzeti

$$\vec n = \vec a \times \vec b = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec i & \vec j & \vec k & \vec i & \vec j \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$$= 2\vec i - \vec j - \vec k - \vec k - \vec i - 2\vec j = \vec i - 3\vec j - 2\vec k = [1,-3,-2].$$

Stavljajući $[A,B,C] = \vec n = [1,-3,-2]$ i $(x_0,y_0,z_0) = T = (1,0,2)$, imamo

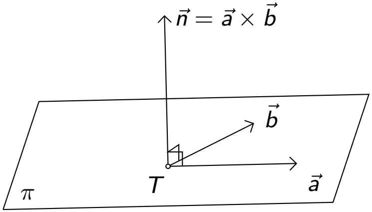
$$\pi \ldots A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$1(x-1) - 3(y-0) - 2(z-2) = 0$$

Zadatak 59

Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π zadane parametarski: $\pi \ldots \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = s - t \\ z = 2 - s + 2t. \end{cases}$

Rješenje. Iz jednadžbe od π vidimo da je $T := (1, 0, 2) \in \pi$ i da su $\vec{a} := [1, 1, -1]$ i $\vec{b} := [1, -1, 2]$ međusobno nekolinearni vektori paralelni s π.



Za vektor normale $\vec{n}$ od π možemo uzeti

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right.$$

$$= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} = [1, -3, -2].$$

Stavljajući $[A, B, C] = \vec{n} = [1, -3, -2]$ i $(x_0, y_0, z_0) = T = (1, 0, 2)$, imamo

$$\pi \ldots A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 1) - 3(y - 0) - 2(z - 2) = 0$$
$$x - 3y - 2z = -3.$$

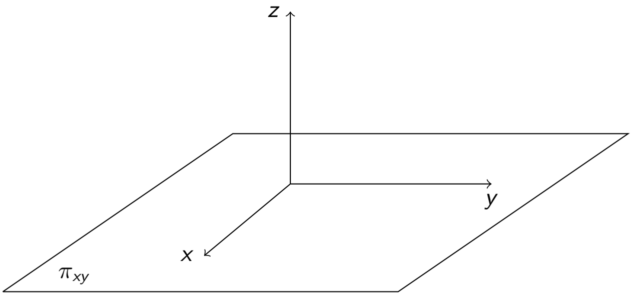
Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (1. način).

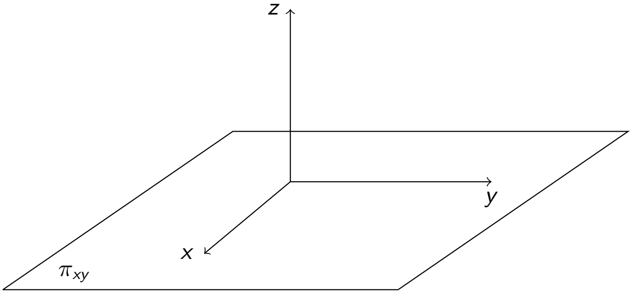


xy-ravnina se očito sastoji od točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sa z-koordinatom 0,

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (1. način).



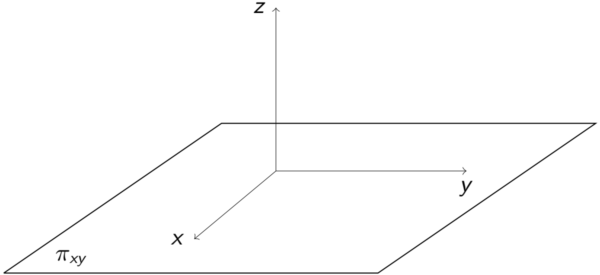
xy-ravnina se očito sastoji od točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sa z-koordinatom 0, dakle njena je jednadžba

$$\pi_{xy} \ldots \;\; z = 0.$$

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

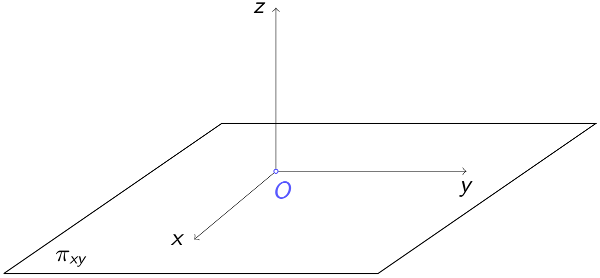
Rješenje (2. način).



Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (2. način).

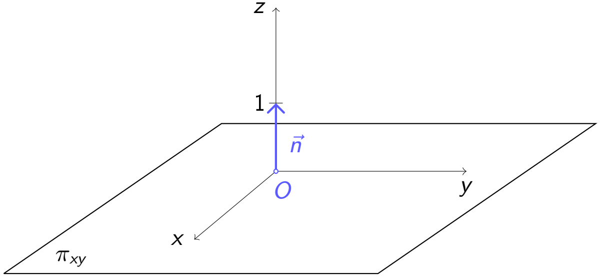


Jasno je da je ishodište $O := (0, 0, 0) \in \pi_{xy}$

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (2. način).

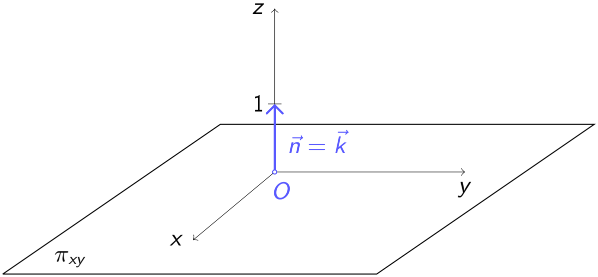


Jasno je da je ishodište $O := (0, 0, 0) \in \pi_{xy}$

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (2. način).

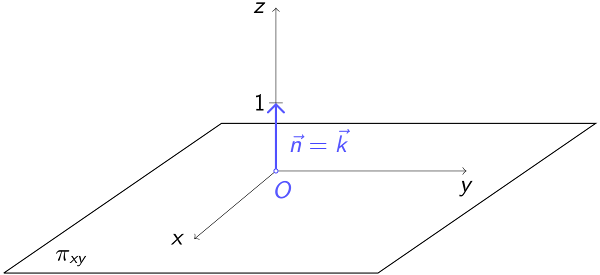


Jasno je da je ishodište $O := (0, 0, 0) \in \pi_{xy}$ i da je jedna normala ravnine π_{xy} vektor $\vec{k} = [0, 0, 1]$

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (2. način).

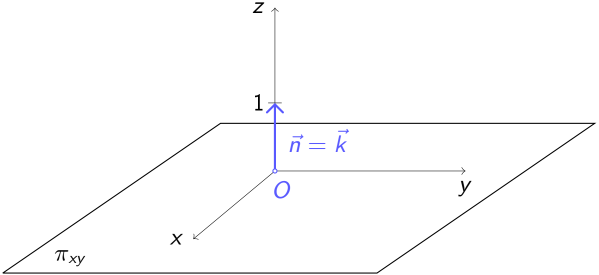


Jasno je da je ishodište $O := (0, 0, 0) \in \pi_{xy}$ i da je jedna normala ravnine π_{xy} vektor $\vec{k} = [0, 0, 1]$, dakle (uvrštavanjem $[A, B, C] = \vec{k} = [0, 0, 1]$ i $(x_0, y_0, z_0) = O = (0, 0, 0)$) imamo

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (2. način).



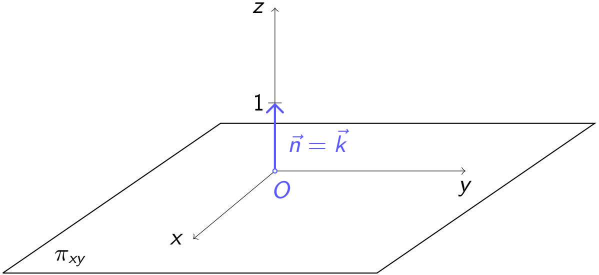
Jasno je da je ishodište $O := (0,0,0) \in \pi_{xy}$ i da je jedna normala ravnine π_{xy} vektor $\vec{k} = [0,0,1]$, dakle (uvrštavanjem $[A,B,C] = \vec{k} = [0,0,1]$ i $(x_0,y_0,z_0) = O = (0,0,0)$) imamo

$$\pi_{xy} \ldots A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

Rješenje (2. način).



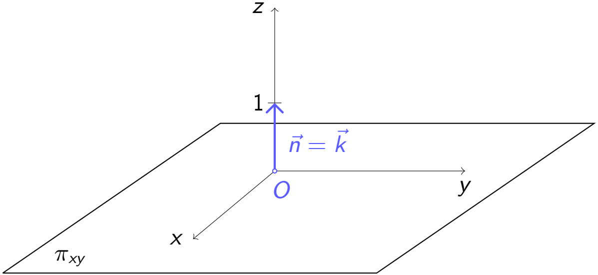
Jasno je da je ishodište $O := (0, 0, 0) \in \pi_{xy}$ i da je jedna normala ravnine π_{xy} vektor $\vec{k} = [0, 0, 1]$, dakle (uvrštavanjem $[A, B, C] = \vec{k} = [0, 0, 1]$ i $(x_0, y_0, z_0) = O = (0, 0, 0)$) imamo

$$\pi_{xy} \ldots \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

Zadatak 60

Odredite kanonski oblik jednadžbe xy-ravnine.

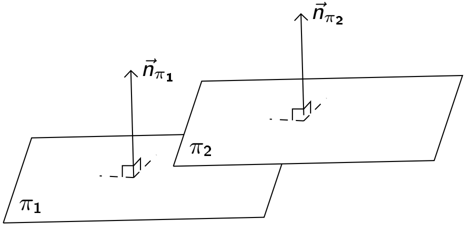
Rješenje (2. način).



Jasno je da je ishodište $O := (0,0,0) \in \pi_{xy}$ i da je jedna normala ravnine π_{xy} vektor $\vec{k} = [0,0,1]$, dakle (uvrštavanjem $[A,B,C] = \vec{k} = [0,0,1]$ i $(x_0, y_0, z_0) = O = (0,0,0)$) imamo

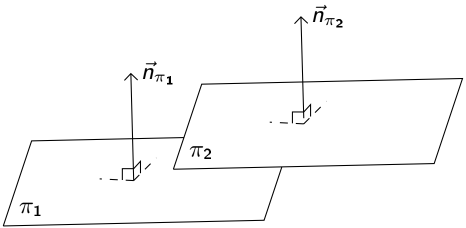
$$\begin{aligned} \pi_{xy} \ldots \ & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ & 0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \\ & z = 0. \end{aligned}$$

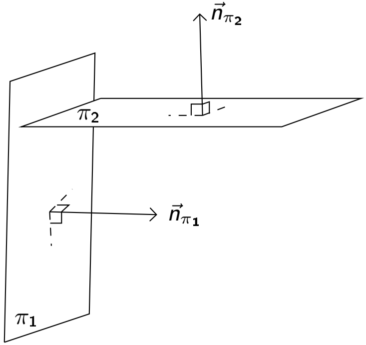
Paralelnost i okomitost ravnina



$$\boxed{\pi_1 \parallel \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2}}$$

Paralelnost i okomitost ravnina





$$\pi_1 \parallel \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2}$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$$

Zadatak 61(a)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \dots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \dots \; x - y = 0$$

paralelne?

Zadatak 61(a)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

paralelne?

Rješenje. Imamo

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2}$$

Zadatak 61(a)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

paralelne?

Rješenje. Imamo

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \quad \Leftrightarrow \quad [1,1,1] \parallel [1,-1,0].$$

Zadatak 61(a)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \ x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \ x - y = 0$$

paralelne?

Rješenje. Imamo

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \quad \Leftrightarrow \quad [1, 1, 1] \parallel [1, -1, 0].$$

Budući da $[1, 1, 1] \nparallel [1, -1, 0]$, ravnine π_1 i π_2 nisu paralelne.

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

okomite?

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

okomite?

Rješenje. Imamo

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$$

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

okomite?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x+y+z=0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x-y=0$$

okomite?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad [1,1,1] \cdot [1,-1,0] = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

okomite?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad [1,1,1] \cdot [1,-1,0] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

okomite?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\pi_1 \perp \pi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [1, 1, 1] \cdot [1, -1, 0] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 61(b)

Jesu li ravnine

$$\pi_1 \ldots \; x + y + z = 0 \qquad \text{i} \qquad \pi_2 \ldots \; x - y = 0$$

okomite?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad [1,1,1] \cdot [1,-1,0] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, ravnine π_1 i π_2 su okomite.